Adı Soyadı: 25.10.2019
Numarası:

MAT 205 DİFERANSİYEL DENKLEMLER-I QUİZ CEVAP ANAHTARI

1) $y' = -\dfrac{3y+4xy^2}{2x+3x^2y}$ denkleminin

i) $\lambda = x^a y^b,\ a,b \in \mathbb{R}$ şeklinde bir integral çarpanını belirleyiniz.

ii) Denklemin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm: i) Denklem $\left(3y+4xy^2\right)dx + \left(2x+3x^2y\right)dy = 0$ formunda yazılırsa ve $\lambda = x^a y^b,\ a,b \in \mathbb{R}$ formunda integral çarpanı varsa denklem bu integral çarpanı ile çarpıldığında tam diferansiyel denklem olmalıdır. Yani

$$\left(3x^a y^{b+1} + 4x^{a+1}y^{b+2}\right)dx + \left(2x^{a+1}y^b + 3x^{a+2}y^{b+1}\right)dy = 0$$

denklemi için $\begin{array}{l} M(x,y) = 3x^a y^{b+1} + 4x^{a+1}y^{b+2} \\ N(x,y) = 2x^{a+1}y^b + 3x^{a+2}y^{b+1} \end{array}$ olmak üzere $\begin{array}{l} M_y = 3(b+1)y^b x^a + 4(2+b)x^{a+1}y^{b+1} \\ N_x = 2(a+1)x^a y^b + 3(a+2)x^{a+1}y^b \end{array}$ olup

$M_y = N_x$ olmalıdır. Buradan

$\left.\begin{array}{l} 3(b+1) = 2(a+1) \\ 4(2+b) = 3(a+2) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 3b-2a=-1 \\ 4b-3a=-2 \end{array}\right\} \Rightarrow a=2, b=1$ dır. O halde integral çarpanı $\lambda = x^2 y$ olarak bulunur.

ii) Denklem integral çarpanıyla çarpılırsa oluşan $\left(3x^2y^2 + 4x^3y^3\right)dx + \left(2x^3y + 3x^4y^2\right)dy = 0$ denklemi tam diferansiyel denklemdir. Gruplama yapılırsa

$$\left(3x^2y^2dx + 2x^3ydy\right) + \left(4x^3y^3 + 3x^4y^2\right)dx = 0$$

$$d\left(x^3y^2\right) + d\left(x^4y^3\right) = d(c)$$

$$x^3y^2 + x^4y^3 = c$$

genel çözümü elde edilir.

Tam diferansiyel denklemin çözümü için diğer yöntem:

$\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y^3$, $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2x^3y + 3x^4y^2$ olacak şekilde $u(x,y)$ fonksiyonu vardır bunu bulalım.

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2x^3y + 3x^4y^2 \Rightarrow u(x,y) = \int\left(2x^3y + 3x^4y^2\right)dy + h(x) \Rightarrow u(x,y) = x^3y^2 + x^4y^3 + h(x)$$

bulunur. $h(x)$ fonksiyonunu belirlemek için x değişkenine göre türev alınıp diğer eşitlik kullanılırsa

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 3x^2y^2 + 4x^3y^3 = 3x^2y^2 + 4x^3y^3 + h'(x) \Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = 0$$ olur.

Genel çözüm $u(x,y) = c$ olduğundan

$$x^3y^2 + x^4y^3 = c$$

şeklinde genel çözüm elde edilir

Dr. Öğrt. Üyesi Fatma Hıra